آمار و احتمال مهندسی، جلسه 23 : 7 خرداد 1401

---

* ادامه بحث یافتن تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $g(x)$

• مثال: توزیع chi-square با یک درجه آزادی

* محاسبه توزیع یک تابع از چند متغیر تصادفی

* محاسبه توزیع مشترک دو تابع از دو متغیر تصادفی

---

* مثال: فرض $X \sim N(0,1)$ ، متغیر Y را به صورت $Y = X^2$ تعریف می‌کنیم.

تابع چگالی احتمال Y را بیابید.

$$Y = g(X) \quad , \quad g(x) = x^2$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

برای یافتن f_Y باید ابتدا معادله $y = x^2$ را حل کنیم

اگر $y<0$ $\longrightarrow$ این معادله جواب حقیقی ندارد $\longrightarrow$ $f_Y(y) = 0 \;:\; y<0$

47-7485-4993

اگر $y>0 \longrightarrow x_1=\sqrt{y} \;,\; x_2=-\sqrt{y}$

با استفاده از قضیه جلسه قبل :

$$f_Y(y)=\frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}+\frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$$

$$=\frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}+\frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2} \quad : y>0$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2} & : \; y>0\\ 0 & : \; y<0\end{cases}$$

توزیع chi-square با درجه آزادی یک .
χ

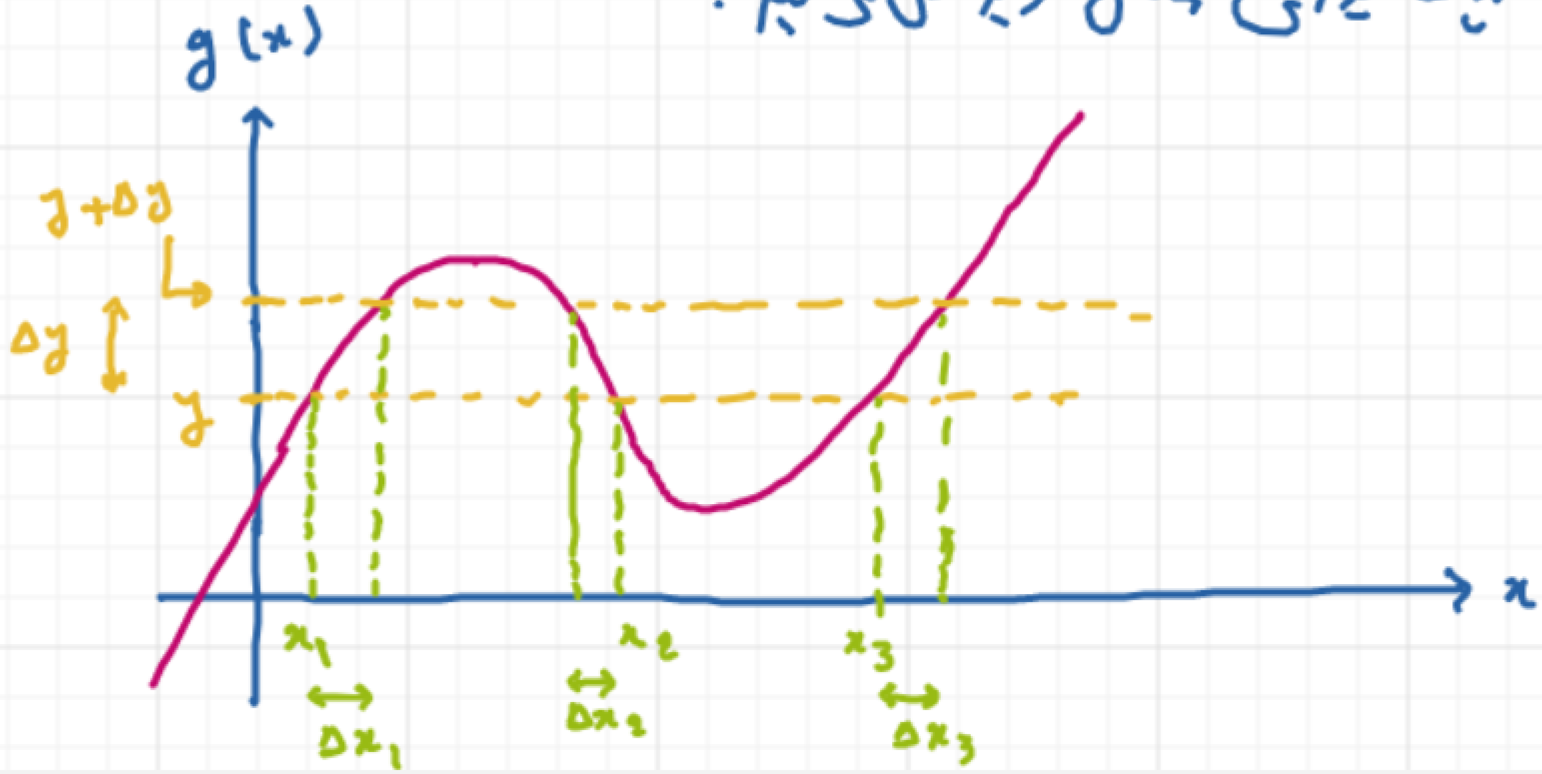
• نکته: توزیع chi-square با k درجه آزادی برابر است با:

$$Q = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

که $X_i \sim N(0,1)$ و $X_i \perp X_j$ برای هر $i \neq j$ ،

• اثبات قضیه بیان شده در جلسه قبل:

برای اینکه از پیچیدگی های غیر ضروری در اثبات صرف نظر کنیم، مسئله را بدون از دست رفتن کلیت برای مثال زیر حل می کنیم:



$$Y = g(X)$$

$$f_Y(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\mathbb{P}[\, y \leq Y \leq y + \Delta y \,]}{\Delta y}$$

با توجه به شکل $Y \in [y, y+\Delta y]$ آنگاه :

$$x_1 \leq X \leq x_1 + \Delta x_1 \qquad : \quad \Delta x_1 > 0$$

$$x_2 + \Delta x_2 \leq X \leq x_2 \qquad : \quad \Delta x_2 < 0$$

$$x_3 \leq X \leq x_3 + \Delta x_3 \qquad : \quad \Delta x_3 > 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[\, y \leq Y \leq y + \Delta y \,] = \mathbb{P}[\, x_1 \leq X \leq x_1 + \Delta x_1 \,] + \mathbb{P}[\, x_2 + \Delta x_2 \leq X \leq x_2 \,]$$

$$+ \ \mathbb{P}[\, x_3 \leq X \leq x_3 + \Delta x_3 \,]$$

$$\simeq f_X(x_1) \cdot \Delta x_1 + f_X(x_2) \cdot |\Delta x_2| + f_X(x_3) \cdot \Delta x_3$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_X(x_1)\cdot \Delta x_1 + f_X(x_2)\,|\Delta x_2| + f_X(x_3)\,\Delta x_3}{\Delta y}$$

برای Δy های کوچک :

$$\Delta x_i \simeq \frac{\Delta y}{g'(x_i)}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \sum_{i=1}^{3} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

---

* محاسبه توزیع یک تابع از چند متغیر تصادفی پیوسته :

• فرض کنید X, Y دو متغیر تصادفی پیوسته باشند و متغیر Z را به صورت

$$Z = g(X, Y)$$

هدف یافتن توزیع Z است، با داشتن تابع g و توزیع مشترک X, Y.

• ابتدا فرض کنید $F_Z(z)$ را بیابیم و بعد با مشتق گرفتن نسبت به z تابع $f_Z(z)$ را بیابیم.

تعریف می‌کنیم: $D_z = \{(x,y) : g(x,y) \leqslant z\}$ ؛ برای هر $z \in \mathbb{R}$ یک D_z داریم.

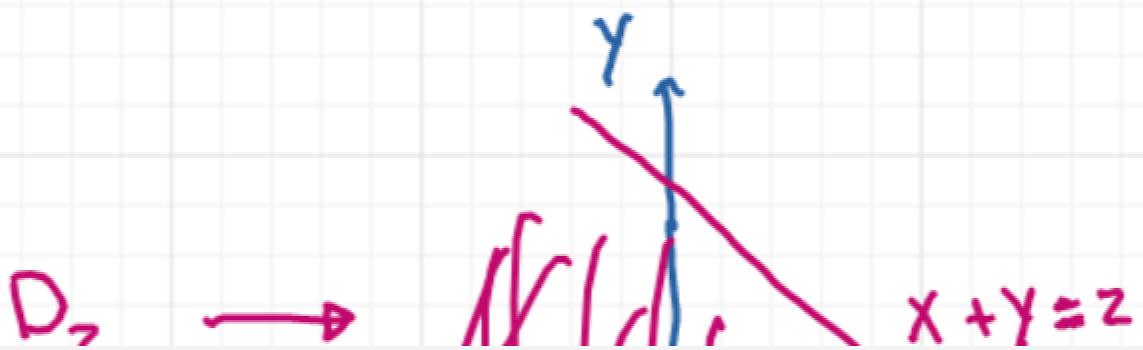
$$F_Z(z) = \mathbb{P}[Z \leqslant z] = \mathbb{P}[g(X,Y) \leqslant z] = \mathbb{P}[(X,Y) \in D_z]$$

$$= \iint_{(x,y)\in D_z} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

• مثال: فرض کنید X و Y دو متغیر پیوسته باشند، تابع چگالی احتمال Z؟

$$\underline{Z = X + Y} \quad \Downarrow \quad g(x,y) = x + y$$

$$F_Z(z) = \mathbb{P}[X + Y \leqslant z] \quad : \forall z \in \mathbb{R}$$



$$\Rightarrow F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(z-y, y)\,dy$$

اگر به صورت خاص $X \perp Y$:

$$\Rightarrow f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y)\,dy$$

این عبارت کانولوشن ت. f_X , f_Y است.

$$= (f_X * f_Y)(z)$$

• داخل پرانتز: اگر عبارت زیر را داشته باشیم:

$b(z)$

$$F_Z(z) = \int_{a(z)} f(x,z)\, dx$$

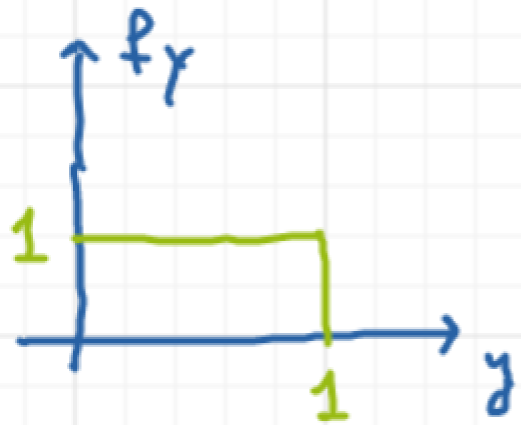
$$\Rightarrow \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{d b(z)}{dz} f(b(z), z) - \frac{d a(z)}{dz} f(a(z), z)$$

$$+ \int_{a(z)}^{b(z)} \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\, dx$$

مثال: فرض کنید $X \sim U[0,1]$, $Y \sim U[0,1]$, $X \perp Y$.

$$Z = X + Y$$

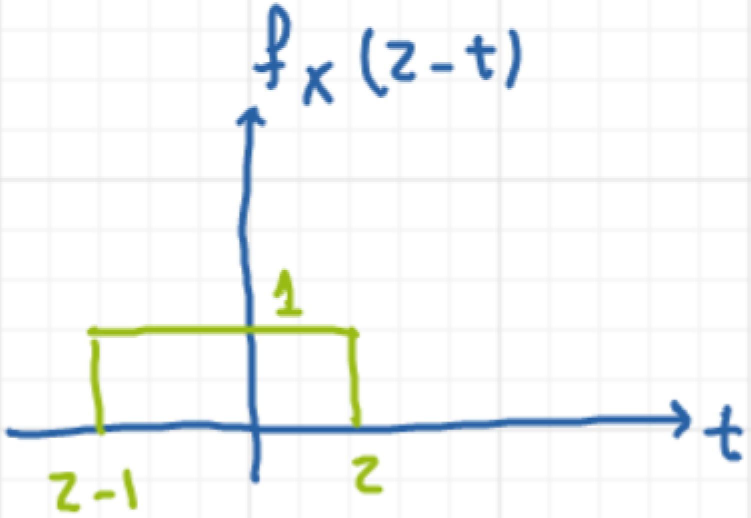
$Z \in [0,2] \leftarrow$ ت چگالی احتمال Z ؟

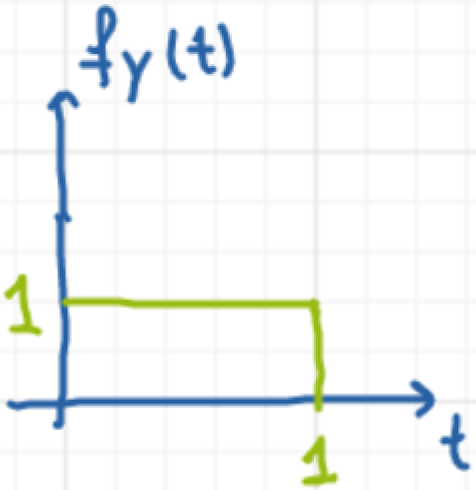


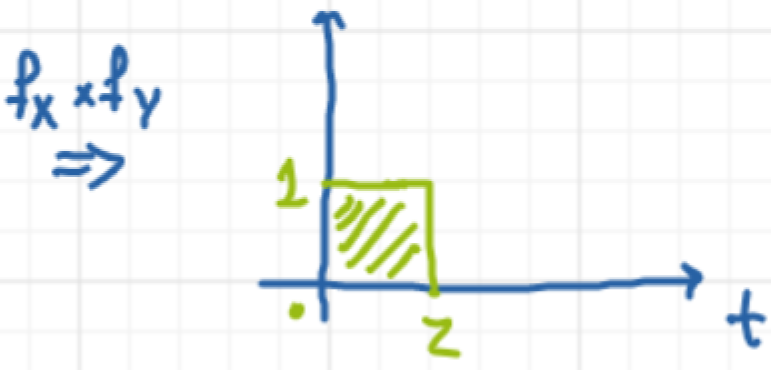
با توجه به مباحث قبلی :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-t)\, f_Y(t)\, dt$$

حالت : $0 \leq Z \leq 1$:

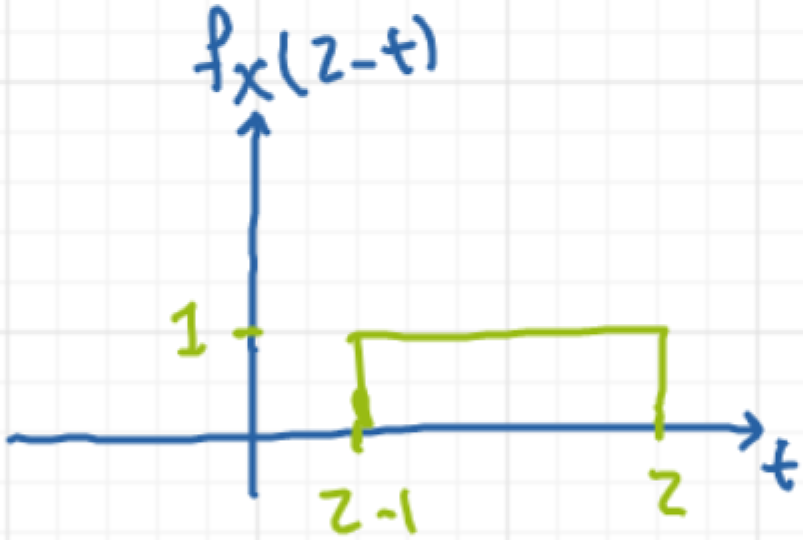


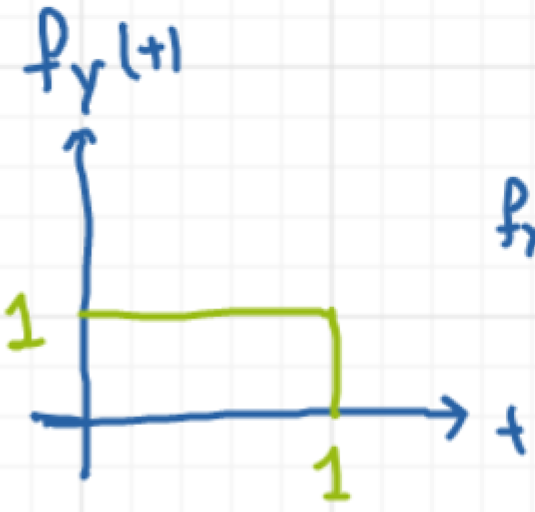


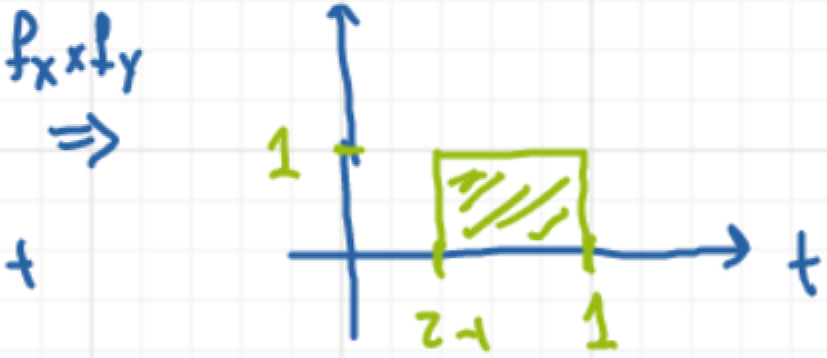


$$\Rightarrow f_Z(z) = z$$

حالت : $1 \leq Z \leq 2$:



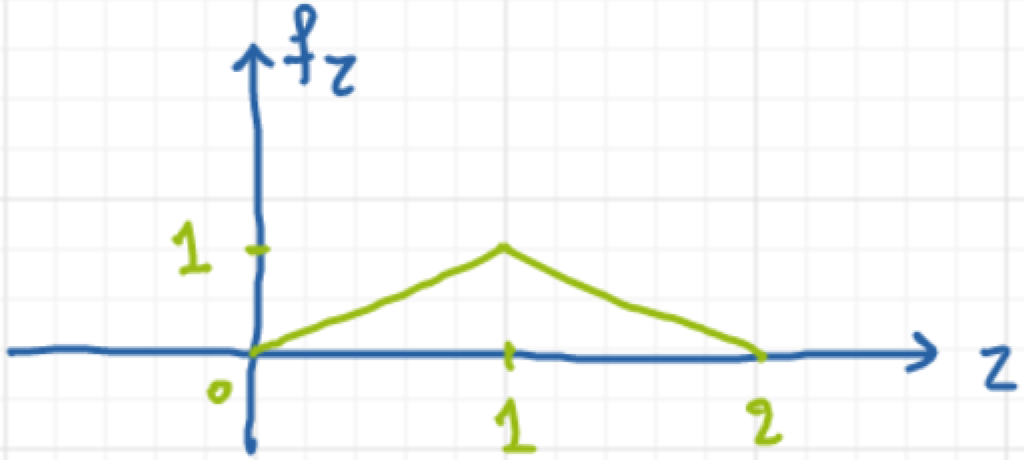




$$\Rightarrow f_Z(z) = 2 - z$$

پس در نهایت داریم:

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & : \quad 0 \leq z \leq 1 \\ 2-z & : \quad 1 \leq z \leq 2 \\ 0 & : \quad \text{o.w.} \end{cases}$$



• اشاره‌ای به قضیه حد مرکزی (Central limit thm.):

تحت شرایطی مجموع تعداد زیادی متغیر تصادفی به توزیع گاوسی میل کنند.

---

* پیدا کردن توزیع دو تابع از دو متغیر تصادفی:

• فرض کنید X و Y متغیر های تصادفی پیوسته باشند و تعریف کنیم:

$$\begin{cases} Z = g(X,Y) \\ W = h(X,Y) \end{cases}$$

• هدف یافتن توزیع مشترک Z و W برحسب g و h و توزیع مشترک X و Y.

• مانند قبل ابتدا می‌توانیم تابع توزیع تجمعی مشترک Z و W را بیابیم و سپس مشتق بگیریم تا تابع چگالی احتمال مشترک Z و W بدست بیاید (با فرض اینکه Z و W مشترکا پیوسته باشند).

$$F_{ZW}(z,w) = \mathbb{P}[Z \leq z, W \leq w]$$

$$= \mathbb{P}[g(X,Y) \leq z, h(X,Y) \leq w]$$

و با تعریف کردن:

$$D_{z,w} = \{(x,y) : \underline{g(x,y) \leq z} , \underline{h(x,y) \leq w}\}$$

این ناحیه توسط دو قید مشخص می‌شود.

در نتیجه داریم :

$$F_{ZW}(z,w) = \iint_{D_{z,w}} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$
